Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Уральский
энергетический
институт

РЯДЫ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

РЯДЫ

Учебное пособие

Рекомендовано
методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся
по техническим направлениям подготовки
и специальностям

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2016

УДК 517.518.3(075.8)
ББК 22.1я73
Р98

Авторы:
Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова,
Е. Г. Полищук, И. Ю. Андреева

Рецензенты:
кафедра прикладной математики УрГЭУ (завкафедрой, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Б. Мельников);
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. ИММ УрО РАН Ю. И. Бердышев

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. А. Н. Сесекин

Р98 **Ряды** : учебное пособие / Н. В. Гредасова, Н. И. Желонкина, М. А. Корешникова, Е. Г. Полищук, И. Ю. Андреева. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 116 с.

ISBN 978-5-7996-1814-8

В учебном пособии представлены основные понятия и теоремы теории рядов. Рассмотрены решения типовых задач. Приведены задания к расчетной работе и указания для ее решения.

Предназначается для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям.

Библиогр.: 6 назв. Рис. 9.

УДК 517.518.3(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7996-1814-8

Оглавление

1. Числовые ряды..5
1.1. Основные понятия и теоремы о сходимости 5
1.2. Достаточные признаки сходимости рядов
с положительными членами 13
1.3. Знакочередующиеся ряды. Признак
Лейбница...25
1.4. Знакопеременные ряды. Абсолютная
и условная сходимость...28

2. Функциональные ряды...34
2.1. Определение функционального ряда.
Область сходимости функционального ряда 34
2.2. Равномерная сходимость функционального
ряда 36
2.3. Свойства функциональных рядов 39

3. Степенные ряды 41
3.1. Определение степенного ряда. Теорема Абеля ...41
3.2. Методы нахождения интервала сходимости
степенного ряда 43
3.3. Дифференцирование и интегрирование
степенных рядов 46
3.4. Разложение функций в степенные ряды...........47

4. Приложения степенных рядов 55
4.1. Приближенные вычисления значений
функции 55
4.2. Приближенные вычисления
определенных интегралов 56
4.3. Решение дифференциальных уравнений
с помощью рядов 57

5. Ряды Фурье..61
5.1. Тригонометрические ряды. Теорема Дирихле...61
5.2. Разложение четных и нечетных функций
в ряд Фурье...67
5.3. Разложение в ряд Фурье
функций с произвольным периодом..................71

6. Решение типового варианта расчетной работы...........80

7. Расчетная работа 90

Библиографический список 115

1. Числовые ряды

1.1. Основные понятия и теоремы о сходимости

Числовой ряд — это выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где члены ряда $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — действительные или комплексные числа, u_n общий член ряда.

Ряд задан, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

n-я частичная сумма ряда — это сумма первых n членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Рассмотрим следующие суммы:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \ldots$$

Ряд сходится, если существует конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (1.1)$$

последовательности частичных сумм ряда.

Предел (1.1) называется ***суммой ряда*** $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд расходится, если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности.

Примеры

1. Ряд 0 + 0 + 0 +... сходится, его сумма равна нулю ($S=0$).
2. Ряд 1 + 1 + 1 +... расходится, его сумма равна бесконечности ($S=\infty$).
3. Ряд $1-1+1+...$ расходится, так как предела частичных сумм не существует.
4. Ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ сходится, его сумма равна единице.

Покажем, что сумма данного ряда равна единице.
Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}.$$

Вычислим коэффициенты A и B:

$$1=An+A+Bn,$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A=1; \end{cases} \begin{cases} B=-1, \\ A=1; \end{cases}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Составим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Свойства рядов

Свойство 1. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.2}$$

сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \tag{1.3}$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (1.2) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (1.3) расходится.

Доказательство

1. Пусть $S_n^{(u)}$ — n-я частичная сумма ряда (1.3).

Тогда

$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = c \cdot S_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S.$$

Так как существует конечный предел частичных сумм, то ряд (1.3) сходится и имеет сумму cS.

2. Покажем, что если ряд (1.2) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (1.3) расходится.

Допустим противное: ряд (1.3) сходится и имеет сумму S_1. Тогда

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$

т. е. ряд (1.2) сходится, что противоречит условию о расходимости данного ряда.

Свойство 2. Если сходится ряд (1.2) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{1.4}$$

а их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \tag{1.5}$$

причем сумма каждого равна $S_1 \pm S_2$.

Доказательство

Пусть $S_n^{(u)}, S_n^{(v)}, S_n$ — n-е частичные суммы рядов (1.2), (1.4), (1.5) соответственно. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$

т. е. каждый из рядов (1.5) сходится и сумма его равна $S_1 \pm S_2$.

Следствие

Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Замечание

Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (1.2) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (1.2) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Пусть S — сумма отброшенных членов ряда, k — наибольший из этих номеров.

Будем считать, что на место отброшенных членов ряда поставим нули. Тогда при $n > k$ будет выполняться равенство $S_n - S'_n = S$, где S'_n — n-я частичная сумма ряда, полученного из ряда (1.2) путем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S + \lim_{n\to\infty} S'_n.$$

Пределы в левой и правой части данного равенства одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд (1.2) сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Аналогично в случае приписывания к ряду конечного числа членов.

Ряд вида

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$$

называется ***n-м остатком ряда*** (1.2), который получается из ряда (1.2) отбрасыванием его n первых членов.

Согласно свойству 3:

1) ряд (1.2) и его остаток одновременно либо сходятся, либо расходятся;
2) если ряд (1.2) сходится, то его остаток r_n при $n\to\infty$ стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty}r_n=0.$$

Ряд геометрической прогрессии

Ряд вида

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots\quad (a\neq 0) \tag{1.6}$$

называется ***рядом геометрической прогрессии***.

Исследуем данный ряд на сходимость.

Сумма первых n первых членов прогрессии находится по формуле

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q},\quad q\neq 1.$$

Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-a\lim\frac{q^n}{1-q}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, т. е. ряд (1.6) сходится и его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$.
2. Если $|q|>1$, то $q^n \to \infty$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (1.6) расходится.
3. Если $q=1$, получаем ряд $a+a+a+\ldots$, который расходится, так как $S_n = n\cdot a$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Если $q=-1$, получаем ряд $a-a+a-a+\ldots$, который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Ряд (1.6) при $|q|=1$ расходится.

Таким образом, ряд (1.6) сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\ge 1$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$

Решение

Данный ряд представляет собой ряд геометрической прогрессии с $q=\frac{1}{2}<1$ и $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, то есть ряд сходится.

Необходимый признак сходимости

Теорема. Если ряд сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится и $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$. Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие (достаточное условие расходимости ряда)

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд расходится.

Доказательство

Если бы ряд сходился, то по теореме $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, но это противоречит условию, поэтому ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{5n+1}.$$

Решение

Данный ряд расходится, так как выполняется достаточное условие расходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{5n+1} = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Гармонический ряд

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

называется ***гармоническим рядом***. У данного ряда каждый член является средним гармоническим для двух соседних членов.

Гармоническое среднее чисел $x_1, x_2, .. x_n$ — число h, обратное которому есть среднее арифметическое чисел, обратных данным числам:

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Однако гармонический ряд расходится.

Доказательство

Рассмотрим два ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \frac{1}{17} + \ldots \quad (\text{а})$$

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \overbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} + \ldots \quad (\text{б})$$

Пусть $S_n^{(1)}$ — сумма n первых членов гармонического ряда (а), $S_n^{(2)}$ — сумма n первых членов ряда (б).

Так как каждый член ряда (а) больше соответствующего члена ряда (б) или равен ему, то для $n > 2$ получаем

$$S_n^{(1)} > S_n^{(2)}. \qquad (1.7)$$

Подсчитаем частичные суммы ряда (б) для значений n, равных 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2},$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4\,\text{слагаемых}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8\,\text{слагаемых}} = \frac{6}{2},$$

$$S_{2^5} = \frac{7}{2},\ S_{2^6} = \frac{8}{2},\ S_{2^7} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом,

$$S_{2^k} = \frac{k+2}{2} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Вычислим предел частичных сумм ряда (б):

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(б)} = \infty.$$

Из соотношения (1.7) следует, что и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(а)} = \infty$, то есть гармонический ряд расходится.

1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Признаки сравнения

Теорема 1

Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{1.9}$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \le v_n, \tag{1.10}$$

тогда

1) если сходится ряд (1.9), то сходится и ряд (1.8);
2) ели расходится ряд (1.8), то расходится и ряд (1.9).

Доказательство

Пусть $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$ — n-е частичные суммы рядов (1.8) и (1.9) соответственно. Из (1.10) следует, что

$$S_n^{(u)} \le S_n^{(v)}. \tag{1.11}$$

1. Докажем, что если сходится ряд (1.9), то сходится и ряд (1.8).

Пусть ряд (1.9) сходится и его сумма равна S_2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2.$$

Члены ряда (1.9) положительны, поэтому

$$S_n^{(v)} < S_2,$$

а с учетом неравенства (1.11):

$$S_n^{(u)} < S_2.$$

Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, \ldots, S_n^{(u)}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом S_2.

По признаку существования предела последовательности, последовательность $\left\{S_n^{(u)}\right\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = S_1$, т. е. ряд (1.8) сходится.

Пусть теперь ряд (1.8) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty.$$

Тогда с учетом неравенства (1.11):

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = \infty,$$

то есть ряд (1.9) расходится.

Замечание

Теорема 1 справедлива и в том случае, когда неравенство (1.10) выполняется не для всех членов ряда (1.8) и (1.9), а начиная с некоторого номера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}.$$

Решение

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

который сходится (ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Так как

$$\frac{1}{3^n + 4} < \frac{1}{3^n},$$

то по *Теореме 1* данный по условию ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд).

Так как, начиная со второго элемента, выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n},$$

то по *Теореме 1* данный по условию ряд расходится.

Теорема 2 (предельный признак сравнения)

Пусть даны два знакоположительных ряда (1.8) и (1.9). Если существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A \quad (0<A<\infty),$$

то ряды (1.8) и (1.9) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

По определению предела последовательности для всех n, кроме, возможно, их конечного числа, для любого $\varepsilon>0$:

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-A\right|<\varepsilon,$$

$$(A-\varepsilon)v_n<u_n<(A+\varepsilon)v_n. \qquad (1.12)$$

Если ряд (1.8) сходится, то из левого неравенства (1.12) и *Теоремы 1* вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$ также сходится.

Тогда, согласно свойству числовых рядов, ряд (1.9) также сходится.

Если ряд (1.8) расходится, то из правого неравенства (1.12), *Теоремы 1* и свойства числовых рядов ряд (1.9) также расходится.

Аналогично, если ряд (1.9) сходится (расходится), то будет сходиться (расходиться) и ряд (1.8).

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2+n-5}.$$

Решение

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд). Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^2+n-5}:\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{3}.$$

Так как $\frac{2}{3}>0$, то по *Теореме 2* оба ряда одновременно расходятся.

Таким образом, данный по условию ряд расходится.

Признак Даламбера

Теорема. Пусть дан ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Доказательство

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то по определению предела для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что для всех $n>N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon$$

или

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon. \tag{1.13}$$

Пусть $l<1$. Можно подобрать ε так, что

$$l+\varepsilon<1.$$

Обозначим $l+\varepsilon=q,\quad q<1.$ Тогда из правой части неравенства (1.13):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$$

или

$$u_{n+1} < qu_n, \; n > N.$$

В силу свойства числовых рядов (если к ряду прибавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд и исходный сходятся или расходятся одновременно):

$$u_{n+1} < qu_n \text{ для всех } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Построим серию неравенств:

$$\begin{aligned}
&u_2 < qu_1, \\
&u_3 < qu_2 < q^2 u_1, \\
&u_4 < qu_3 < q^3 u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_n < qu_{n-1} < q^{n-1} u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

То есть члены ряда

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

меньше соответствующих членов ряда

$$qu_1 + q^2 u_1 + q^3 u_1 + \ldots + q^{n-1} u_1 + \ldots,$$

который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. На основании признака сравнения сходится ряд $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$, следовательно, сходится и исходный ряд.

Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Тогда с некоторого номера N будет выполняться неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

или

$$u_{n+1} > u_n,$$

то есть члены ряда возрастают с увеличением номера n. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0,$$

значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечание

Если $l = 1$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}.$$

Решение

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} : \frac{n^5}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера данный по условию ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}.$$

Решение

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{5^{n+1}} : \frac{n!}{5^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cdot n!\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!} \right) = \infty.$$

Так как предел равен бесконечности, то по признаку Даламбера данный по условию ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд, используя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}.$$

Решение

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1+2}:\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)=1.$$

Так как предел равен 1, то признак Даламбера ответа о сходимости или расходимости ряда не дает.

Радикальный признак Коши

Теорема. Пусть дан ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l.$$

Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Доказательство

Так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то по определению предела — для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что для всех $n>N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<\varepsilon$$

или

$$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon. \tag{1.14}$$

Пусть $l<1$. Можно подобрать ε так, что $l+\varepsilon<1$. Обозначим $l+\varepsilon=q, q<1$. Тогда из правой части неравенства (1.14) имеем

$$\sqrt[n]{u_n}<q,$$

$$u_n<q^n, \quad n\geq N.$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots, \tag{1.15}$$

$$q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+\ldots \tag{1.16}$$

Ряд (1.16) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Члены ряда (1.15), начиная с u_N, меньше членов ряда (1.16). В силу свойства числовых рядов и признака сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится.

Пусть $l>1$. Начиная с некоторого номера $n=N$, будем иметь

$$\sqrt[n]{u_n}>1$$

или

$$u_n>1,$$

то есть все члены рассматриваемого ряда, начиная с u_N, больше 1. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n.$$

Решение

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\frac{1}{3}.$$

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то по радикальному признаку Коши данный по условию ряд сходится.

Интегральный признак сходимости Коши

Теорема. Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и не возрастают, то есть

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots,$$

и пусть $f(x)$ — такая непрерывная невозрастающая функция, что

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \quad f(n) = u_n.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд;
2) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд.

Доказательство

Изобразим члены ряда геометрически (рис. 1.1).

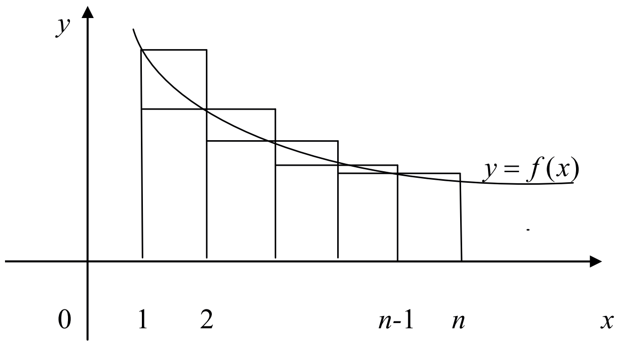

Рис. 1.1

Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 1.1:

$$Q=\int_1^n f(x)dx.$$

Возьмем n-ю частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$:

$$S_n=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n).$$

Тогда площадь Q_+ выступающей фигуры будет

$$Q_+=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)=S_{n-1},$$

а площадь Q_- входящей фигуры

$$Q_-=f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=S_n-f(1).$$

Из построения и свойств функции $f(x)$ следует, что

$$Q_-<Q<Q_+,$$

$$S_n-f(1)<\int_1^n f(x)dx<S_{n-1}.$$

Так как $S_{n-1}<S_n$, то

$$S_n-f(1)<\int_1^n f(x)dx<S_n,\ \ n=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.17}$$

1. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=A.$$

Так как

$$\int_1^n f(x)dx\le A=\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

(в силу условия $f(x)>0$для $x\in[1,+\infty)$), то из неравенства (1.17) следует, что

$$S_n < f(1)+\int_1^n f(x)dx < f(1)+A = M = \text{const},$$

$$0 < S_n < M,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Последовательность $\{S_n\}$ ограничена и при возрастании n сумма S_n возрастает. Поэтому последовательность имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

2. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Так как по условию $f(x)>0$ для $x\geq 1$, то

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = +\infty.$$

Из неравенства

$$S_n \geq \int_1^n f(x)dx,\ \ n=1,2,\ldots$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Замечание

Вместо интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ можно брать интеграл

$$\int_k^{+\infty} f(x)dx,\ \ k>1,\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Решение

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^a\right)=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(a+1)}\right)=\frac{1}{\ln 2},$$

следовательно, интеграл сходится, значит и ряд сходится.

Обобщенный гармонический ряд

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

называется ***обобщенным гармоническим рядом***.

Исследуем его на сходимость, используя интегральный признак Коши.

1. Если $p>1$, то ряд сходится, так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$.
2. Если $p<1$, то ряд расходится, так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty$.
3. Если $p=1$, то ряд расходится, так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty$.

1.3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд — это ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, \qquad (1.18)$$

где $u_n>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Теорема Лейбница (признак Лейбница)

Знакочередующийся ряд сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots; \tag{1.19}$$

2) общий член ряда стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{1.20}$$

При этом сумма S ряда: $0 < S < a.$

Доказательство

Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда (1.18):

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Из (1.19) следует, что выражение в каждой скобке положительно, значит S_{2m} — положительна ($S_{2m} > 0$) и возрастает с увеличением m.

Запишем эту же сумму по-другому:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

В силу (1.19) каждая из скобок положительна, поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 мы получим число, меньшее чем u_1, то есть

$$S_{2m} < u_1.$$

Таким образом, S_{2m} при увеличении m возрастает и ограничена сверху, следовательно, S_{2m} имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S, \quad 0 < S < u_1.$$

Мы доказали, что последовательность «четных» частичных сумм имеет предел S.

Докажем теперь, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к пределу S.

Рассмотрим сумму $n = 2m + 1$ первых членов ряда (1.18):

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

Так как по условию

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0,$$

то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Итак, последовательность «нечетных» частичных сумм имеет предел S.

Таким образом, ряд (1.18) сходится.

Замечания

1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (1.19) выполняются, начиная с некоторого номера N.

2. Теорема Лейбница геометрически иллюстрируется следующим образом. Будем на числовой прямой откладывать частичные суммы:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 - u_2 = S_1 - u_2, \quad S_3 = S_2 + u_3, \quad S_4 = S_3 - u_4, \quad S_5 = S_4 + u_5, \ldots.$$

Точки, соответствующие частичным суммам, будут приближаться к некоторой точке S, которая изображает сумму ряда.

3. Оценка ошибки.

Заменим S частичной суммой S_n. Оценим ошибку, которую мы допускаем при данной замене.

Отброшенный ряд (остаток) представляет собой знакочередующийся ряд

$$(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots),$$

сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда (то есть меньше u_{n+1}).

Значит, ошибка, совершаемая при замене S на S_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Пример. Проверить, что знакочередующийся ряд сходится и вычислить его сумму с точностью до 0,01:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}+\ldots$$

Решение

Проверим условия (1.19) и (1.20):

1) $u_n > u_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0.$

Так как оба условия выполняются, то ряд сходится.

Четвертый член ряда будет первым, меньшим 0,01:

$$a_4=\frac{1}{256}\approx 0,003<0,01.$$

Поэтому, для выполнения заданной точности достаточно взять первых три слагаемых:

$$S=\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\approx 0,203\approx 0,20.$$

1.4. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется ***знакопеременным***, если среди его членов имеются как положительные так и отрицательные члены.

Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).

Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \qquad (1.21)$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \qquad (1.22)$$

составленный из абсолютных величин данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство

Пусть S_n и G_n — суммы первых n членов ряда (1.21) и (1.22); S_n' — сумма всех положительных членов ряда (1.21); S_n'' — сумма абсолютных величин всех отрицательных первых n членов ряда (1.21).

Тогда

$$S_n = S_n' - S_n'' \qquad G_n = S_n' + S_n''.$$

По условию G_n имеет предел G.

S_n', S_n'' — положительные возрастающие величины, меньшие G, следовательно, они имеют пределы S', S''.

Из соотношения $S_n = S_n' - S_n''$ следует, что S_n имеет предел и он равен $S' - S''$, то есть знакопеременный ряд (1.21) сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots,$$

где α — любое число.

Решение

Рассмотрим ряд

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right| + \ldots .$$

Так как $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то данный по условию ряд сходится.

Данный признак является достаточным, но не необходимым.

Абсолютная и условная сходимость

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.23}$$

называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{1.24}$$

Если же знакопеременный ряд (1.23) сходится, а ряд (1.24) расходится, то ряд (1.23) называется ***условно сходящимся***.

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Решение

Данный ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд, составленный из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится (как гармоничный). Данный по условию ряд является условно сходящимся.

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{n^n}.$$

Решение

Трудно проверить условия теоремы Лейбница. Исследуем на сходимость ряд, составленный из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n}.$$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n^n}{(n+1)^{n+1}2^{n-1}}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}=\frac{2}{e}\cdot 0=0<1.$$

Значит ряд, составленный из абсолютных величин, сходится. Поэтому данный по условию ряд сходится, причем абсолютно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из данного ряда перестановкой членов, так же сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд.

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получится абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S_1+S_2 (S_1-S_2).

3. Под произведением двух рядов

$$u_1+u_2+u_3+\ldots \quad \text{и} \quad v_1+v_2+v_3+\ldots$$

понимают ряд вида

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\ldots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1)+\ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 S_2$.

Замечание

В случае условно сходящихся рядов соответствующие свойства не имеют места.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать на сходимость и установить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\dots .$$

Ответ. Ряд сходится, $S_n = \frac{1}{2}$.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$.

Ответ. Ряд расходится.

3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^5-1}$.

Ответ. Ряд сходится.

4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$.

Ответ. Ряд расходится.

5. Исследовать числовой ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$.

Ответ. Ряд сходится.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n-1}$.

Ответ. Ряд расходится.

7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n^2+2}\right)^2$.

Ответ. Ряд сходится абсолютно.

8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.

Ответ. Ряд сходится условно.

2. Функциональные ряды

2.1. Определение функционального ряда. Область сходимости функционального ряда

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

члены которого есть функции от x, называется ***функциональным рядом***.

Придавая x определенные числовые значения, получаем различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться.

Область сходимости функционального ряда — это совокупность значений x, при которых функции

$$u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$$

определены и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ — сходится.

Областью сходимости чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси OX.

Каждому значению из области сходимости соответствует определенное значение величины

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x).$$

$S(x)$ называется ***суммой функционального ряда***.

Представим $S(x)$ в виде

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),\ R_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots.$

$R_n(x)$ называется ***остатком функционального ряда***.

Пример. Исследовать сходимость ряда
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n$ в точках $x=1,\ x=3.$

Решение

Пусть $x=1.$ Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$. По признаку Даламбера данный ряд расходится.

Пусть $x=3.$ Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{10}{13}\right)^n$. По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}.$$

Решение

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x+2)^n}{(n+1)(x+2)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)|x+2|} = \frac{1}{|x+2|} < 1 \Rightarrow |x+2| > 1.$$

Решим неравенство $|x+2|>1.$ Получим $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty).$

Исследуем точки: $x=-1,\ x=-3.$

Пусть $x=-1.$ Получим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}.$

Данный ряд расходится.

Пусть $x=-3$. Получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. По признаку Лейбница данный ряд сходится.

Таким образом, область сходимости данного по условию ряда

$$(-\infty;-3]\cup(-1;+\infty).$$

Пример. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n!(2n-1)}.$$

Решение

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}n!(2n-1)}{(n+1)!(2n+1)x^{2n-1}}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{(n+1)(2n+1)}=0<1\ .$$

Поэтому область сходимости $(-\infty;+\infty)$.

2.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Сходящийся функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называется ***равномерно сходящимся*** в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $N\in\mathbb{N}$, что при $n\geq N$

$$|R_n(x)|<\varepsilon\ \forall x\in X.$$

При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X, где $u_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ — непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Признаки равномерной сходимости рядов

1. Признак Вейерштрасса

Если функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, причем числовой ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

сходится, то функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

в этой области сходится равномерно.

2. Признак Абеля

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = a_1(x) b_1(x) + a_2(x) b_2(x) + \ldots + a_n(x) b_n(x) + \ldots \qquad (2.1)$$

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно в области D, а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность и в совокупности (при любых x, n) ограничены:

$$|a_n(x)| \le K.$$

Тогда ряд (2.1) сходится равномерно в области D.

3. Признак Дирихле

Пусть частичные суммы $B_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ в совокупности (при любом x, n) ограничены:

$$|B_n(x)| \le M,$$

а функции $a_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность, которая сходится к 0 равномерно в области D. Тогда и ряд (2.1) сходится равномерно в этой области.

Пример. С помощью признака Вейерштрасса показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^n nx$$

сходится равномерно на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Решение

Так как

$$\left| \frac{1}{n^2} \sin^n nx \right| \le \frac{1}{n^2}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный по условию ряд сходится равномерно при любых значениях x.

Мажорируемые ряды

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.2}$$

называется ***мажорируемым*** в некоторой области изменения x, если существует такой сходящийся числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.3}$$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)| \le a_1,\ |u_2(x)| \le a_2,\ \ldots,\ |u_n(x)| \le a_n.$$

Говорят, что ряд (2.2) мажорируется рядом (2.3), или ряд (2.3) служит мажорантным для ряда (2.2).

Теорема. Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемого на некотором отрезке $[a,b]$, есть функция непрерывная на этом отрезке.

2.3. Свойства функциональных рядов

Теорема 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$... — непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots$$

сходится и имеет сумму $\int\limits_a^b S(x)dx$, $[a,b] \in X$.

Теорема 2. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, ..., $u_n'(x)$,.... Если в этой области ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}'.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n(x+1)^n}$.

Ответ. $x \in (-\infty; -3] \cup (1; \infty)$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$.

Ответ. $x \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Ответ. $x \in [-1, 1)$.

4. Проверить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ равномерно сходится на всей числовой прямой.

3. Степенные ряды

3.1. Определение степенного ряда. Теорема Абеля

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.. + a_n x^n + \ldots; \tag{3.1}$$

или вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots, \tag{3.2}$$

где $x_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ — действительные числа.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку.

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд (3.1) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| < |x_0|.$$

2. Если ряд (3.1) расходится при некотором значении x_0', то он расходится при всяком x, для которого

$$|x| > |x_0'|.$$

Доказательство

1. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0{}^n = 0$. Следовательно, $\exists\, M > 0$ такое, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M, то есть

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M.$$

Перепишем равенство (3.1) в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0{}^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0{}^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \tag{3.3}$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$\left|a_0\right| + \left|a_1 x_0\right| \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|a_2 x_0^2\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{3.4}$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{3.5}$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (3.5) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно, сходится.

Так как члены ряда (3.4) меньше соответствующих членов ряда (3.5), то ряд (3.4) сходится. Значит ряд (3.3) или (3.1) сходится (сходится абсолютно).

2. Если бы в какой-то точке x, удовлетворяющей условию $|x| > |x_0'|$, ряд сходился, то в силу (1) он должен был бы сходиться и в точке x_0', так как $|x_0'| < |x|$. Но это противоречит условию, что в точке x_0' ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке x.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда.

Если x_0 — точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости.

Обозначим $|x_0| = R$ — ***радиус сходимости***, $(-R;R)$ — ***интервал сходимости*** степенного ряда.

1. Пусть $R > 0$. Если $|x| < R$, то при всех x ряд сходится абсолютно. Если $|x| > R$, то при всех x ряд расходится.

2. Пусть $R = 0$. Ряд сходится только в точке 0 (или x_0).

3. Пусть $R = \infty$. Ряд сходится на всей числовой оси *OX*.

На концах интервала вопрос о сходимости (расходимости) решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Рассмотрим ряд (3.2). Если $x_0 = 0$, то получим ряд (3.1).

Определим область сходимости ряда (3.2).

Пусть $x - x_0 = X$, тогда

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots$$

$|X| < R$ — интервал сходимости ряда (3.2). Получим

$$|x - x_0| < R,$$

$$x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Точки $x = x_0 \pm R$ исследуются на сходимость отдельно.

3.2. Методы нахождения интервала сходимости степенного ряда

1. Если $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то есть ряд содержит все целые положительные степени разности $x - x_0$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

при условии, что этот предел существует (конечный или бесконечный).

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n \frac{1}{n^2}.$$

Решение

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Найдем радиус сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Решим неравенство

$$|x-2| < 1.$$

Получим интервал

$$1 < x < 3.$$

Исследуем отдельно точки $x=1$, $x=3$.

Пусть $x=1$. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x=3$. Получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

который сходится (по интегральному признаку Коши).

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $1 \le x \le 3$.

2. Если исходный ряд имеет вид

$$a_0 + a_1(x - x_0)^p + a_2(x - x_0)^{2p} + \ldots + a_n(x - x_0)^{np} + \ldots$$

(p — некоторое определенное целое положительное число 2,3...), то

$$R = \sqrt[p]{\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю, и последовательность оставшихся в ряду показателей степеней разности $x - x_0$ любая (то есть не образует арифметическую прогрессию), то радиус сходимости равен

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}},\ a_n \neq 0.$$

4. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}.$$

Решение

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}\cdot 5^n \cdot n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}\cdot (x+1)^n}\right| = \frac{1}{5}|x+1| < 1.$$

Решим неравенство $|x+1| < 5$. Получим $-6 < x < 4$.

Исследуем отдельно точки $x=-6$, $x=4$.

Пусть $x=-6$. Получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x=4$. Получим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который расходится.

Таким образом, данный по условию ряд сходится в области $-6\le x<4$.

3.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Ряд, полученный почленным дифференцированием (интегрированием) степенного ряда, имеет тот же интервал сходимости и его сумма внутри интервала сходимости равна производной (интегралу) от суммы первоначального ряда.

Если $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, то

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},\quad \int_a^x S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1},\quad -R<x-x_0<R.$$

3.4. Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<R$, то есть

$$x_0-R<x<x_0+R$$

может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (остаток ряда),

$$c=x_0+\Theta(x-x_0),\ 0<\Theta<1.$$

При $x_0=0$ получим ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Теорема 1

Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ удовлетворял условию:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Теорема 2 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора)

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом n выполняется неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M,$$

где M — положительная постоянная, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

и $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = \sin x$.

Данная функция имеет производные любого порядка, причем

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1,\ n = 0, 1, 2, \dots,\ x \in (-\infty; +\infty).$$

$$f(x) = \sin x,\ f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = -\cos x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f'''(0) = -1, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Ряд будет иметь вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty. \quad (3.6)$$

2. $f(x) = \cos x$.

Заметим, что $\cos x = (\sin x)'$. Продифференцируем ряд (3.6) и получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{\left[2(n-1)\right]!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty.$$

3. $f(x) = e^x$.

Данная функция имеет производные всех порядков на интервале $(-a;a)$, где $a > 0$ — любое число, причем $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^a$, $(n = 0,1,2,\ldots)$. Так как $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, то получаем ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty.$$

4. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Данную функцию можно представить следующим образом

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots.$$

Тогда

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

Область сходимости: $-1 \le x \le 1$.

Итак,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \ -1 \le x \le 1.$$

5. $f(x) = \ln x$.

Разложим в ряд по степеням $(x-1)$.

Заметим, что $\frac{1}{x} = \left(\ln x\right)'$.

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$ — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -(x-1)$.

$$\frac{1}{x} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n+\ldots. \qquad (3.7)$$

Область сходимости: $|q| < 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$.

Интегрируем почленно ряд (3.7)

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[t - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} + \ldots \right]\Bigg|_1^x .$$

Итак,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{n}(x-1)^n + \ldots, \ 0 < x \le 2.$$

6. $f(x) = \ln(x+1)$.

Заметим, что

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \ -1 < x < 1.$$

Проинтегрируем

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Итак,

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \le 1.$$

7. $f(x) = (1+x)^m$, m — любое действительное число.

Вычислим производные:

$$f(x) = (1+x)^m, \quad (0) = 1,$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f'(0) = m,$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad f(0) = m(m-1), \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots.(m-(n-1))(1+x)^{m-n}, \quad f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-(n-1)).$$

Составим ряд

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots.$$

Найдем область сходимости по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n-m)}{n+1}\right| = |x|,$$

$$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

При $m \ge 0 \quad -1 < x < 1;$

при $-1 < m < 0 \quad -1 < x \le 1;$

при $m \le -1 \quad -1 < x < 1.$

8. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f(x) = \operatorname{ch} x$.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Пример. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x-5}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-6)$.

Решение

Разложить в ряд Тейлора — это значит:

1. Составить формально этот ряд.
2. Найти его область сходимости.
3. Доказать, что для всех x из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

1. Вычислим производные

$$y = \frac{1}{x-5},\ y(6) = 1,$$

$$y' = -\frac{1}{(x-5)^2},\ y'(6) = -1,$$

$$y'' = \frac{2}{(x-5)^3},\ y''(6) = 2!,$$

$$y''' = -\frac{2\cdot 3}{(x-5)^4},\ y'''(6) = -3!,$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}},\ y^{(n)}(6) = (-1)^n n!.$$

Составим формально ряд

$$\frac{1}{x-5} = 1 + \frac{-1}{1!}(x-6) + \frac{2!}{2!}(x-6)^2 - \frac{3!}{3!}(x-6)^3 + \ldots = \sum_{n}^{\infty} (-1)^n (x-6)^n.$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c = x_0 + \theta(x-x_0),\ 0 < \theta < 1;$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(c-5)^{n+2}(n+1)!}(x-6)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}},\ c = 6 + \theta(x-6).$$

2. Найдем область сходимости ряда. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{(x-6)^n}\right| = |x-6|<1, \quad 5<x<7.$$

Пусть $x=5$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n = 1+1+\ldots$, который расходится.

Пусть $x=7$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, который также расходится.

Область сходимости ряда: $x\in(5;7)$.

3. Докажем, что для всех x из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Для всех $x\in(5;7)$ имеем

$c-5>1,\ |x-6|<1,$

$$\lim_{n\to\infty}R_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{c-5}\left(\frac{x-6}{c-5}\right)^{n+1} = 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{x-5} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-6)^n, \quad x\in(5;7).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

Ответ. На промежутке $[-4;0)$ заданный ряд сходится, радиус сходимости $R=2$.

2. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Ответ. Область сходимости степенного ряда $(-1;1)$, радиус сходимости $R=1$.

3. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Ответ. Ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой прямой $(-\infty;\infty)$.

4. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$.

Ответ. $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(2n)!!}x^{2n}$.

5. Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в степенной ряд.

Ответ. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

6. Разложить функцию $f(x)=\ln(3-x)$ в ряд Маклорена.

Ответ. $\ln 3-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)}$.

4. Приложения степенных рядов

4.1. Приближенные вычисления значений функции

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

Приближенное вычисление значения функции в точке.

Пример. Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение

Используем разложение функции $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty.$$

Переведем градусы в радианы

$$10^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}17453.$$

Подставим в разложение $\cos x$ вместо x число 0,17453, получим

$$\cos 10^\circ = 1 - \frac{(0{,}17453)^2}{2!} + \frac{(0{,}17453)^4}{4!} + \ldots.$$

Третий член ряда меньше заданной точности, то есть

$$\frac{(0{,}17453)^4}{4!} < 0{,}0001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то

$$|R_2| < |u_3| < 0{,}0001,$$

то есть погрешность от отбрасывания всех членов ряда, начиная с третьего, меньше 0,0001.

Таким образом,

$$\cos 10^\circ \approx 1 - 0{,}01523;$$

$$\cos 10^\circ \approx 0{,}9848.$$

4.2. Приближенные вычисления определенных интегралов

Ряды применяются для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной затруднительно.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int\limits_0^{0{,}25} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Используем разложение функции e^x в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \; -\infty < x < +\infty.$$

Подставим в разложение e^x вместо x выражение $-x^2$, получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{0,25}e^{-x^2}dx=\int_0^{0,25}(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots)dx=x\Big|_0^{0,25}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,25}+\frac{x^5}{10}\Bigg|_0^{0,25}-\frac{x^7}{42}\Bigg|_0^{0,25}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}+\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}+\ldots.$$

Так как

$$\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}<0,001,$$

то

$$\int_0^{0,25}e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{192}=0,245.$$

4.3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Рассмотрим на примерах два метода решения дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Метод неопределенных коэффициентов

Данный метод наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения,

$$y' = x^2 + y,\ \ y(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

Решение

Решение будем искать в виде ряда:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots.$$

Продифференцируем последнее равенство по x

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots.$$

Подставим $y(x), y'(x)$ в данное по условию уравнение и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots = x^2 + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

$$x^0 : c_1 = c_0,$$
$$x^1 : 2c_2 = c_1,$$
$$x^2 : 3c_3 = c_2 + 1,$$
$$x^3 : 4c_4 = c_3,\ \dots .$$

Определяем коэффициенты:

$$c_0 = y(0) = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{2},\ c_4 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом,

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \dots.$$

Метод последовательного дифференцирования

Метод последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 y^2 - 1,\ y(0) = 1,$$

используя метод последовательного дифференцирования.

Решение

Решение будем искать в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Вычислим значения производных $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, ...:

$$y'(x) = x^2 y^2 - 1,\ y'(0) = -1;$$

$$y''(x) = 2xy^2 + 2x^2 yy',\ y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2(yy')' =$$

$$= 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2 y'^2 + 2x^2 yy'',\ y'''(0) = 2,\ \ldots .$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим

$$y(x) = 1 + (-x) + \frac{1}{3}x^3 - \ldots.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя соответствующий ряд, вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 10^{-4}.

Ответ. 0,9511.

2. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[4]{630}$ с точностью до 10^{-4}.

Ответ. 5,0100.

3. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int\limits_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

Ответ. 0,2483 с точностью до 10^{-4}.

4. Взяв шесть членов разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.

Ответ. 0,747 с точностью до 10^{-3}.

5. Найти первые четыре члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = 2x^2 + 3x + y^2 \qquad y(0) = 2.$$

Ответ. $y(x) = 2 + 4x + \frac{19}{2}x^2 + \frac{56}{3}x^3 + \ldots$.

6. Найти первые три члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' = xy' - y + e^x \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Ответ. $y(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \ldots$.

5. Ряды Фурье

5.1. Тригонометрические ряды. Теорема Дирихле

При изучении периодических процессов, то есть процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются, целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в тригонометрический ряд.

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5.1}$$

называется ***тригонометрическим рядом***.

Действительные числа a_0, a_n, $b_n (n = 1,\ 2,\ \ldots)$ называются ***коэффициентами*** тригонометрического ряда.

Запишем формулы, которые в дальнейшем понадобятся.

Пусть m и n являются целыми положительными числами, тогда имеют место следующие формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} \left. \dfrac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \ (n \neq 0), \\ x\big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \ \ (n = 0); \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \text{ при любом } n; \tag{5.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx = \begin{cases} 0, \ (m \neq n), \\ \pi, \ (m = n); \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx = 0; \tag{5.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx = \begin{cases} 0, \ (m \neq n), \\ \pi, \ (m = n). \end{cases} \tag{5.6}$$

Формулы (5.2)- (5.6) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

обладают ***свойством ортогональности***: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π, равен нулю.

Формулы (5.2)–(5.6) справедливы и в случае, когда область интегрирования есть отрезок $[0; 2\pi]$.

Пусть функция $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{5.7}$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi; \pi]$ (можно взять отрезок $[0; 2\pi]$). Предположим, что ряд (5.7) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Найдем коэффициенты a_n и b_n, проинтегрировав обе части равенства (5.7) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = \pi a_0.$$

Итак,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (5.8)$$

Умножим обе части равенства (5.7) на $\cos mx$ и проинтегрируем полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nxdx\right).$$

Пусть $m = n$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi.$$

Получаем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ n = 1,2,3,\ldots. \qquad (5.9)$$

Аналогично, умножив, равенство (5.7) на $\sin mx$ и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π, найдем:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n = 1,2,3,\ldots. \qquad (5.10)$$

Тригонометрический ряд (5.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.8)–(5.10), называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Числа a_0, a_n, $b_n (n=1,2,...)$, определяемые по формулам (5.8)–(5.10), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$.

Для функции $f(x)$ интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$ записывают:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

Рассмотрим условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой функцию $f(x)$.

Функции, которые имеют период $T = 2\pi$ называют 2π***-периодическими*** функциями.

Теорема Дирихле

Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

то есть равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Условия 1 и 2 *Теоремы Дирихле* называются ***условиями Дирихле***.

Итак, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет место разложение (5.7):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (5.8)- (5.10). Равенство (5.7) может нарушаться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi;\pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Замечания

1. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0;2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (5.7), где коэффициенты определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=1,2,3,\ldots.$$

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, то есть теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

Пример. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{\pi}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.1).

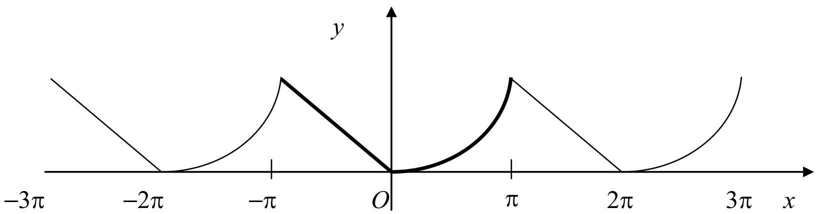

Рис. 5.1

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx=\frac{5}{6}\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{3(-1)^n-1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi^2 n^3},$$

$$b_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ четное}, \\ -\dfrac{4}{\pi^2 n^3}, \text{ если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right).$$

5.2. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье

Если разлагаемая в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция $f(x)$ является четной (или нечетной), то вычисление коэффициентов Фурье упрощается.

Пусть функция $f(x)$ четная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{5.11}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Пусть функция $f(x)$ нечетная. Ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{5.13}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n \in \mathbb{N}. \qquad (5.14)$$

Ряды (5.11) и (5.13) называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами ***по косинусам*** и ***по синусам*** соответственно.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x,\ \ -\pi < x < \pi.$$

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.2).

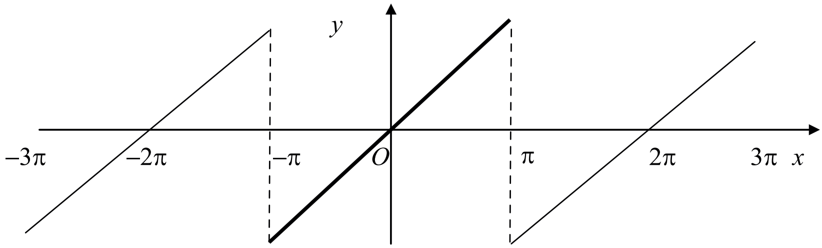

Рис. 5.2

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале $(-\pi;\pi)$ функция $f(x) = x$ нечетная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только синусы, а при косинусах все коэффициенты $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Вычислим коэффициенты b_n по формуле (5.14)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},$$

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

В интервале $(-\pi;\pi)$ это равенство имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$, то есть в данном случае в всех внутренних точках интервала $(-\pi;\pi)$. Вне интервала этот ряд изображает периодическое продолжение рассматриваемой функции.

В точках же разрыва, которыми являются точки $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, ..., сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках.

Найдем эти пределы

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0} x = \pi, \quad \lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi+0} x = -\pi.$$

Среднее арифметическое этих пределов

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{\pi-\pi}{2} = 0.$$

Во всех точках разрыва этой функции получим то же самое.

Из полученного разложения при $x = \dfrac{\pi}{2}$ можно получить интересную сумму

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

Отсюда следует, что сумма ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = |x|, \; -\pi \le x \le \pi.$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.3).

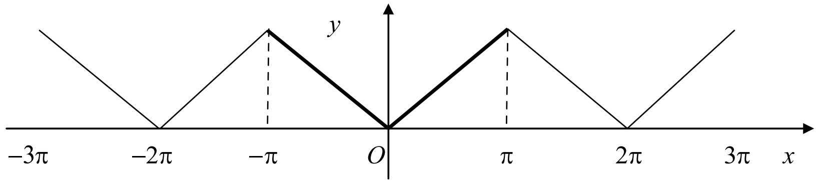

Рис. 5.3

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит она разложима в ряд Фурье. На интервале $(-\pi;\pi)$ функция $f(x)=x$ четная. Отсюда следует, что ряд Фурье этой функции будет содержать только постоянную составляющую и косинусы, а при синусах все коэффициенты $b_n=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Вычислим коэффициенты a_n по формулам (5.12)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi n^2}\Big((-1)^n-1\Big).$$

Если n — четное число, то $a_2=a_4=a_6=....=a_{2k}=0$, а если n — нечетное число, то $a_n=-\dfrac{4}{\pi n^2}$.

Итак, разложение функции в ряд будет иметь вид:

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\frac{\cos x}{1^2}-\frac{4}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{4}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2}-\ldots,$$

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).$$

Так как функция $f(x)=|x|$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$, то полученный ряд сходится к $|x|$ при всех значениях x из этого отрезка, а вне этого отрезка — к периодическому продолжению этой функции.

Из полученного ряда можно получить интересную сумму. Пусть $x=0$, тогда

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right),$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right),$$

умножая обе части этого равенства на $\frac{\pi}{4}$, получим

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

5.3. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l;l]$, имеет период $2l$ ($f(x+2l)=f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделаем подстановку $x=\frac{l}{\pi}t$. Преобразуем функцию $f(x)$ в функцию $\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и имеет период $T=2\pi$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt,\ n = 0,1,2,\ ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt,\ n = 1,2,3,....$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}), \qquad (5.15)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n = 0,1,2,\ ..., \qquad (5.16)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n = 1,2,3,.... \qquad (5.17)$$

Ряд (5.15) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (5.16), (5.17), называется ***рядом Фурье*** для ***функции*** $f(x)$ с периодом $T = 2l$.

Замечание

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ четная, то ее ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi nx}{l}, \qquad (5.18)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,\ \ a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n\in\mathbb{N}; \qquad (5.19)$$

если функция $f(x)$нечетная, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad (5.20)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.21}$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 5.4).

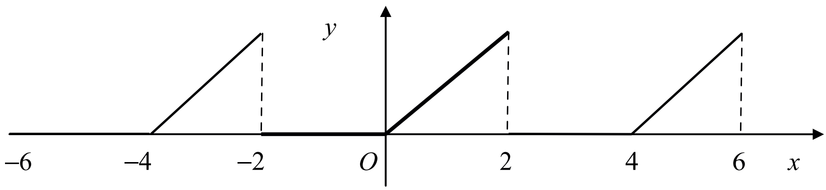

Рис. 5.4

Найдем коэффициенты ряда Фурье. Коэффициенты a_n вычислим по формуле (5.16)

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} x\cdot\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Вычислим отдельно a_0.

$$a_0 = 1.$$

Коэффициенты b_n вычислим по формуле (5.17)

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_{0}^{2} x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(-1)^n.$$

Подставим найденные значения коэффициентов a_0, a_n, b_n в ряд (5.15), учитывая, что $l = 2$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi n x}{2}}{2}.$$

Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть функция $f(x)$ непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x. Но, непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке $[a;b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a;b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b-a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \le x \le l$.

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a;b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$. (Это частный случай: начало координат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a;b]$; область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0;l]$, где $l = |b - a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд функции $f(x)$ при $x \in [0;l]$.

Разложение в ряд косинусов функции, заданной на отрезке [0; *l*]

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится четная функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно оси ординат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$. Тогда получится график четной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на сегменте $[0;l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении четных периодических функций в ряды Фурье следует, что $f(x)$ имеет разложение в ряд косинусов по формуле (5.18).

Разложение в ряд синусов функции, заданной на отрезке [0; *l*]

Если на отрезке определена какая-нибудь функция, то она может быть (единственным способом) продолжена на всю числовую прямую так, что получится нечетная функция с периодом $2l$. В самом деле, возьмем график заданной функции на этом сегменте, присоединим к нему фигуру, симметричную с ним относительно начала координат. Затем к образовавшейся фигуре присоединим все ее горизонтальные смещения на расстояния, кратные $2l$ и добавим точки с координатами nl (где n — любое целое число). Тогда получится график нечетной функции с периодом $2l$, совпадающей с заданной функцией на сегменте $[0;l]$.

Отсюда и из сказанного ранее о разложении нечетных периодических функций в ряды Фурье следует, что $f(x)$ имеет разложение в ряд синусов по формуле (5.20).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;l]$ имеет одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва I рода функции $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равно одному и тому же числу:

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Замечание

Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0;\pi]$. Такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (5.11), (5.13)).

Пример. Разложить в ряд Фурье по синусам следующую функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4h}{l},\ 0\le x\le\dfrac{l}{4},\\ -\dfrac{4h}{l}\left(x-\dfrac{l}{2}\right),\ \dfrac{l}{4}\le x\le\dfrac{3}{4}l,\\ \dfrac{4h}{l}(x-l),\ \dfrac{3}{4}l\le x\le l.\end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ (рис. 5.5).

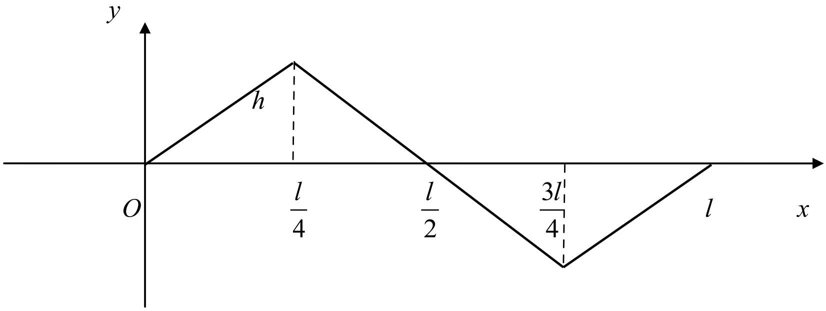

Рис. 5.5

Функция данного вида встречается в теории свободных колебаний конечной струны.

Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом. Коэффициенты a_0, a_n будут равны нулю. Коэффициенты b_n определим по формуле (5.21):

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left(\int_0^{l/4}\frac{4h}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}dx + \int_{l/4}^{3l/4} -\frac{4h}{l}\left(x-\frac{l}{2}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}dx + \int_{3l/4}^{l}\frac{4h}{l}(x-l)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right) =$$

$$= -\frac{32h}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.20), получим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{32h}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{4}\sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= -\frac{32h}{\pi^2}\left(\frac{\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^2} - \frac{\sin\frac{6\pi x}{l}}{6^2} + \frac{\sin\frac{10\pi x}{l}}{10^2} - \frac{\sin\frac{14\pi x}{l}}{14^2} + \ldots\right).$$

Пример. Разложить в ряд Фурье по косинусам следующую функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ 0<x<\pi.$$

Решение

Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом (рис. 5.6).

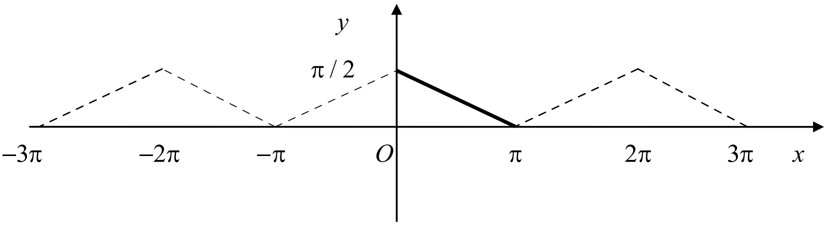

Рис. 5.6

Так как функцию требуется разложить в ряд по косинусам, то коэффициенты b_n равны нулю. Коэффициенты a_0, a_n определим по формулам (5.12):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx dx=\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n).$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (5.11), получим

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right),$$

где $0<x<\pi\left(S(0)=\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}}{2}=\dfrac{\pi}{2},\ S(\pm\pi)=\dfrac{0+0}{2}=0\right).$

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x<0,\\ 3, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

Ответ. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{10}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\ldots\right).$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=5x-1$ на интервале $(-5;5)$.

Ответ. $f(x)=-1+\frac{50}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{5}.$

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ на интервале $(-1;1)$.

Ответ. $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$

4. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$ на интервале $(0;\pi)$.

Ответ. $f(x)=3+\frac{\pi^2}{6}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$

5. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x\sin x$ на интервале $(0;\pi)$.

Ответ. $f(x)=-\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(4n^2-1\right)^2}\sin 2nx.$

6. Решение типового варианта расчетной работы

Задача 1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}\ldots,$

б) $-\frac{2}{1^2+1}+\frac{4}{2^2+1}-\frac{6}{3^2+1}+\frac{8}{4^2+1}-\ldots.$

Решение

а) Найдем общий член ряда. Числители образуют арифметическую прогрессию

$$1,3,5,7,\ldots.$$

n-й член прогрессии находится по формуле $a_n=a_1+d(n-1)$. Здесь $a_1=1,\ d=2$, поэтому $a_n=2n-1$. Знаменатели образуют геометрическую прогрессию

$$2,2^2,2^3,2^4,\ldots.$$

n-й член данной прогрессии находится по формуле $b_n=b_1q^{n-1}$. Здесь $b_1=2,\ q=2,$ поэтому $b_n=2^n.$ Следовательно, общий член ряда будет иметь вид

$$u_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2^n}.$$

Ряд знакоположительный. Исследуем его на сходимость. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}:\frac{2^n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(2n-1)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2}<1$, ряд сходится.

б) Найдем общий член ряда. Числители образуют арифметическую прогрессию

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots.$$

n-й член прогрессии находится по формуле $a_n=a_1+d(n-1)$. Здесь $a_1=2$, $d=2$, поэтому $a_n=2n$. Закономерность в знаменателе очевидна $b_n=n^2+1$. Общий член ряда будет иметь вид

$$u_n=(-1)^n\frac{a_n}{b_n}=(-1)^n\frac{2n}{n^2+1}.$$

Ряд знакочередующийся. Исследуем его на абсолютную сходимость. Используем признак Лейбница. Проверим условия (1.19) и (1.20):

1) $u_n>u_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}=0.$

Так как оба условия выполняются, то ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин

$$z_n=\frac{2n}{n^2+1}.$$

Исследуем данный числовой ряд на сходимость. Используем интегральный признак Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}=\ln(x^2+1)\Big|_1^{\infty}=\infty.$$

Интеграл расходится. Следовательно, данный по условию ряд сходится условно.

Задача 2. Вычислить сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots.$$

Решение

Найдем общий член ряда. Разложим знаменатель на две арифметические прогрессии

$$1,4,7,\ldots \text{ и } 4,7,10,\ldots.$$

Общий член ряда будет иметь вид

$$u_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1}.$$

Вычислим коэффициенты A и B:

$$1=A(3n+1)+B(3n-2),$$

$$\begin{cases}3A+3B=0,\\ A-2B=1;\end{cases}\quad \begin{cases}B=-\dfrac{1}{3},\\ A=\dfrac{1}{3};\end{cases}$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Составим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

Задача 3. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{n^3 3^n}.$$

Решение

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{2(n+1)}3^n n^3}{(n+1)^3 3^{n+1}(x-4)^{2n}}\right|=\frac{|(x-4)^2|}{3}<1.$$

Решим неравенство $\left|(x-4)^2\right|<3$. Получим $4-\sqrt{3}<x<4+\sqrt{3}$.

Исследуем отдельно точки $x=4-\sqrt{3},\ x=4+\sqrt{3}$.

Пусть $x=4\pm\sqrt{3}$. Получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$

который сходится как обобщенный гармонический ($p=3>1$).

Таким образом, область сходимости ряда:

$$[4-\sqrt{3};4+\sqrt{3}].$$

Задача 4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}.$$

Решение

Воспользуемся разложением e^x в ряд Маклорена

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

Заменяя x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!};$$

$$1-e^{-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n!};$$

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}-\frac{x^6}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n+1)!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n+1)!},\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Задача 5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[3]{9}$ с точностью до 0,001.

Решение

Используем биномиальный ряд

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots,\ |x|<1.$$

Представим $\sqrt[3]{9}$ следующим образом

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Полагая $m=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{8}$, получим

$$\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{8}\right)^3-\ldots\right)=$$

$$=2+\frac{1}{12}-\frac{1}{288}+\frac{5}{20736}+\ldots.$$

Найдем первый член по модулю, меньший 0,001.

$$u_4=\frac{5}{20736}\approx 0{,}0002<0{,}001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то

$$|R_3|<|u_4|<0{,}001.$$

Вычисляя слагаемые (второе и третье) с 4 десятичными знаками, получим

$$\sqrt[3]{9} \approx 2 + 0,0833 - 0,0035 = 2,0798 \approx 2,080.$$

Задача 6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

Решение

Разложим подынтегральную функцию в ряд, воспользовавшись разложением $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \ -1 \le x \le 1.$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \frac{x^8}{9} - \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \frac{x^7}{49} + \frac{x^9}{81} - \ldots\right)\Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{32 \cdot 25} - \frac{1}{128 \cdot 49} + \frac{1}{512 \cdot 81} - \ldots .$$

Если сохранить 4 первых члена, то погрешность от отбрасывания остальных членов ряда будет меньше модуля пятого члена, так как ряд знакочередующийся.

$$|R_4| < |u_5| = \frac{1}{512 \cdot 81} \approx 0,00002 < 0,0001.$$

Слагаемые будем вычислять с 5 десятичными знаками, тогда общая погрешность будет меньше 0,0001.

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx 0,50000 - 0,01389 + 0,00125 - 0,00016 = 0,4872.$$

Задача 7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = x + x^2 + y^2, \; y(0) = 1.$$

Решение

Используем метод последовательного дифференцирования. Пусть искомая функция разложена в ряд Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots.$$

Вычислим значения производных $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, ...:

$$y'(x) = x + x^2 + y^2, \, y'(0) = 1;$$
$$y''(x) = 1 + 2x + 2yy', \, y''(0) = 3;$$
$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'', \, y'''(0) = 10, \ldots .$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим

$$y(x) = 1 + x + \frac{3}{2!} x^2 + \frac{10}{3!} x^3 + \ldots.$$

Задача 8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \quad \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

Решение

Построим график функции $f(x)$ с ее периодическим продолжением (рис. 7.1).

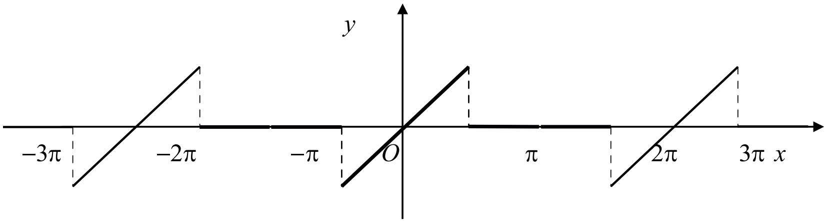

Рис. 7.1

Заданная функция является нечетной. Поэтому коэффициенты a_n при косинусах равны нулю и разложение в ряд Фурье будет содержать только синусы. Найдем коэффициенты b_n по формуле (5.14)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

Учитывая, что

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{нечетное число}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, \text{ если } n - \text{четное число}; \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ если } n - \text{нечетное число}, \\ 0, \text{ если } n - \text{четное число}. \end{cases}$$

Получаем окончательно: для нечетных n

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

а для четных n

$$b_n = -\frac{1}{n}(-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right) +$$

$$+\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} - \frac{\sin 8x}{8} + \dots\right).$$

В точке разрыва $x = \frac{\pi}{2}$ сумма ряда равна среднему арифметическому значений односторонних пределов функции

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 9. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0,3, & 0 < x < 0,5, \\ -0,3, & 0,5 < x < 1. \end{cases}$$

Решение

Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащей только косинусы, продолжим ее на соседний слева промежуток $(-1;0]$ четным образом (рис. 7.2). Тогда коэффициенты b_n будут равны нулю.

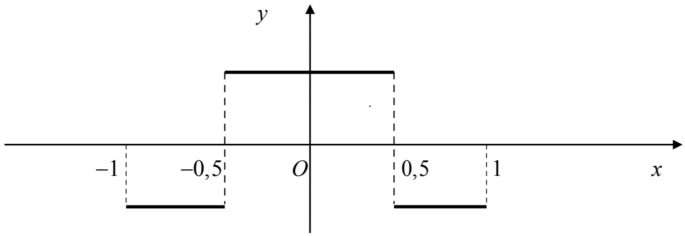

Рис. 7.2

Вычислим коэффициенты a_n по формуле (5.19)

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\left(\int_0^{0,5} 0,3dx - \int_{0,5}^{1} 0,3dx\right) = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 2\left(\int_0^{0,5} 0,3\cos\pi nxdx - \int_{0,5}^{1} 0,3\cos\pi nxdx\right) = \frac{1,2}{n\pi}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Если n — четное, то $a_n = 0$.

Если n — нечетное, $n = 2k-1,\ k = 1,2,3,...$, то

$$a_n = \frac{1,2}{(2k-1)\pi}\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}\frac{1,2}{(2k-1)\pi}.$$

Подставим найденные коэффициенты в (5.18), получим искомое разложение в ряд

$$f(x) = \frac{1,2}{\pi}\left(\frac{\cos\pi x}{1} - \frac{\cos 3\pi x}{3} + \frac{\cos 5\pi x}{5} + \ldots(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1} + \ldots\right).$$

7. Расчетная работа

В данном разделе приведены задачи, которые могут быть использованы для проведения расчетной работы, а также контрольных работ по теме «Ряды».

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots;$$

$$\text{б) } 3-\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{7}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{4^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{x}-1.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sin 20^\circ$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,6} \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' = ye^x,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi < x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x)=x^2+1,\ \ x\in(0;1).$$

Вариант 2

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а)}\ \frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(6!)^2}{6!}+\ldots;$$

$$\text{б)}\ 2-\frac{3}{4}+\frac{4}{9}-\frac{5}{16}+\ldots\,.$$

2. Вычислить сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots\,.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\frac{6}{8+2x-x^2}.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\cos 40^\circ$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' = xy + y',\ y(0) = y'(0) = 1.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0, \\ 2, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x) = x^2 - 1,\ \ x \in (0;1).$$

Вариант 3

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

а) $\dfrac{1}{1\cdot 11} + \dfrac{1}{2\cdot 12} + \dfrac{1}{3\cdot 13} + \ldots;$

б) $\dfrac{\cos e}{e} - \dfrac{\cos 2e}{e^2} + \dfrac{\cos 3e}{e^3} - \dfrac{\cos 4e}{e^4} + \ldots .$

2. Вычислить сумму ряда и найти область его сходимости

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}(x-2)^{3n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,5} \cos(4x^2)dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = e^{2xy} + 1, \; y(0) = 0.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -1, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x) = x^2, \; x \in (0;2).$$

Вариант 4

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } \frac{2}{1\cdot 2}+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\frac{\ln 5}{5}+\ldots.$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 4}+\frac{1}{8\cdot 5}+\ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\ln\left(1-x-12x^2\right).$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\ln 7$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=x+x^2+y^2,\ \ y(0)=1.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x)=1+3x,\ \ x\in(0;1).$$

Вариант 5

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } \frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\ldots;$$

$$\text{б) } \sin\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{4}+\frac{\sin 3\alpha}{9}-\frac{\sin 4\alpha}{16}+\ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда:

$$\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{6\cdot 3}+\frac{1}{9\cdot 4}+\frac{1}{12\cdot 5}+\ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n .$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\frac{\operatorname{ch}3x-1}{x^2}.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sin 5^\circ$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=y^2+x^3,\ \ y(0)=\frac{1}{2}.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x, \ -\pi < x \leq \pi.$$

9. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x) = |\sin x|.$$

Вариант 6

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } 1 + \frac{2}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \ldots;$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} - \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} - \frac{4}{1+4^4} + \ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+8)3^n}(x+6)^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x) = \left(3 + e^{-x}\right)^2.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\cos 6^\circ$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = x^2 \cdot y^2 - 1,\ y(0) = 2.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x,\ -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0, \\ x,\ 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x) = |\cos x|,\ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Вариант 7

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots;$$

$$\text{б) } 1 - \frac{3}{4} + \frac{4}{8} - \frac{5}{16} + \ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда и радиус его сходимости

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3} (x-4)^{2n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\frac{7}{12-x-x^2}.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[3]{300}$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,4}\frac{\ln(1+x/2)}{x}dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=e^{2xy}+y,\ \ y(0)=0,\ y(0)=0.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] -x+\pi,\ \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\\[2mm] x-\pi,\ \pi<x\le\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x)=x,\ \ x\in(0;2).$$

Вариант 8

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } 1+\frac{7}{10}+\frac{2^2+5^2}{10^2}+\frac{2^3+5^3}{10^3}+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{6\cdot 4}+\frac{1}{9\cdot 6}+\frac{1}{12\cdot 8}+\ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=x^2\sqrt{4-3x}.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\ln 8$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'=y^2+\cos x,\ y(0)=0.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x\le 0,\\ x,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x)=2x-3,\ \ x\in(0;1).$$

Вариант 9

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } \sin\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{9}+3\sin\frac{\pi}{27}+\ldots;$$

$$\text{б) } 1-\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}-\frac{1+4}{1+4^2}+\ldots.$$

2. Вычислить сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\ln(1+2x-8x^2).$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[4]{18}$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,5}\arcsin x\,dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0, \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi < x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x) = x^2, \ \ x \in (0; 2\pi).$$

Вариант 10

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

а) $\dfrac{1\cdot 2}{3} - \dfrac{2\cdot 3}{3^2} + \dfrac{3\cdot 4}{3^3} - \dfrac{4\cdot 5}{3^4} + \ldots;$

б) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2!}{3} + \dfrac{3!}{4} + \dfrac{4!}{5} + \ldots .$

2. Вычислить сумму ряда

$$1 + \frac{2+5}{10} + \frac{2^2 + 5^2}{10^2} + \ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 \, 2^n} (x-3)^n .$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x) = 2x \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

5. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sin 35^\circ$ с точностью до 0,001.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Найти четыре первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения:

$$y' = xy + y^2, \ y(0) = 1.$$

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x \le 0, \\ -x + \pi, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x) = 4 - 2x, \ \ x \in (0; 2).$$

Вариант 11

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

а) $\frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{5}{27} + \frac{7}{81} + \ldots;$

б) $\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots .$

2. Вычислить сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n}(x+4)^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\frac{5}{6+x-x^2}.$$

5. Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до $0{,}000001$.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{2{,}5}\frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$8xy'=-(5x^2+3)y^3,\ y(1)=\sqrt{2}.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1,\ -\pi<x\le-\dfrac{\pi}{2},\\ -1,\ -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x)=1-x$$

в промежутке $(0,1)$.

Вариант 12

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$а)\ 1+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{7^a}+\ldots;$$

$$б)\ \frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{27}-\frac{16}{81}+\ldots.$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{3}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{5}{5^2}+\frac{9}{6^2}+\cdots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=x\cdot\sqrt[3]{27-2x}.$$

5. Вычислить $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ с точностью до $0,0001$.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,4} e^{-3x^2/4}\,dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$y'=y+\frac{x^2}{y},\ y(0)=1.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} -x-\pi, & -\dfrac{3\pi}{2}<x\le-\dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x)=\begin{cases} 2, & 0<x<1, \\ 0, & 1<x<2. \end{cases}$$

Вариант 13

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } \frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^3+\left(\frac{4}{11}\right)^4+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{1}{1\cdot 11}-\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 13}-\frac{1}{4\cdot 14}+\ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$2+\frac{3+4}{12}+\frac{3^2+4^2}{12^2}+\frac{3^3+4^3}{12^3}+\ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n .$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\ln(1+x-12x^2).$$

5. Вычислить $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$ с точностью до $0{,}0001$.

6. Взяв два члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$2(y'+y)=xy^2,\ y(0)=2.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi<x\le 0, \\ \pi, & 0<x\le \pi. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x)=x$$

в промежутке $(0, 1)$.

Вариант 14

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots;$$

$$\text{б) } 1-\frac{\cos e}{e}+\frac{\cos 2e}{e^2}-\frac{\cos 3e}{e^3}+\ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot\ln 2}+\frac{1}{3\cdot\ln 4}+\frac{1}{5\cdot\ln 6}+\ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^{3n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x.$$

5. Вычислить $\ln 7$ с точностью до $0{,}0001$.

6. Взяв два члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int\limits_0^{0,5} x \operatorname{arctg} x dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$y''=x^2y+y',\ y(0)=1, y'(0)=5.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} \pi\ , -\pi<x\le 0, \\ -x+\pi, \quad 0<x\le \pi. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию

$$f(x)=\begin{cases} x,\ 0<x<\pi, \\ 0,\ \pi<x<2\pi. \end{cases}$$

Вариант 15

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а)}\ \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\ldots;$$

$$\text{б)}\ \frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}-\frac{4}{81}+\ldots.$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{2\cdot\ln 2}+\frac{1}{3\cdot\ln 4}+\frac{1}{4\cdot\ln 6}+\frac{1}{5\cdot\ln 8}+\ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+3)!}(x+4)^{2n+1}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

5. Вычислить $\sin 40^\circ$ с точностью до $0,0001$.

6. Взяв три члена разложения $\cos x$ в ряд, вычислить

$$\int_0^1 x^4 \cos x dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = ye^x + 1,\ y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le 2. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \sin \frac{x}{2}$$

в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Вариант 16

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } 2tg\frac{\pi}{4}+3tg\frac{\pi}{6}+4tg\frac{\pi}{8}+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{1\cdot 2}{3}-\frac{2\cdot 3}{3^2}+\frac{3\cdot 4}{3^3}-\frac{4\cdot 5}{3^4}+\ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{7\cdot\ln^2 3}+\frac{1}{8\cdot\ln^2 4}+\frac{1}{9\cdot\ln^2 5}+\ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n}(x+2)^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\frac{5}{6-x-x^2}.$$

5. Вычислить $tg40^\circ$ с точностью до $0,0001$.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^1 e^{-x^3}dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$y'+xy=(x-1)e^x y^2,\ y(0)=1.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -1<x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \cos\frac{x}{2}$$

в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Вариант 17

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots;$$

$$\text{б) } 2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{8} - \frac{5}{16} + \ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)^3}(x-4)^{3n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x) = \sqrt[4]{16-5x}.$$

5. Вычислить $\operatorname{ctg} 38^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

6. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,5} \sin(4x^2)\,dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = x^2y^2 - 1,\ y(0) = 1.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -4<x\le -2, \\ 1, & -2<x\le 2. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье периодическую ($T=2\pi$) функцию

$$f(x)=x^2-1$$

в промежутке $(-\pi,\pi)$.

Вариант 18

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } \frac{1}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{4^2}+\frac{7}{5^2}+\ldots;$$

$$\text{б) } 2-\frac{2+3}{6}+\frac{2^2+3^2}{6^2}-\frac{2^3+3^3}{6^3}+\ldots.$$

2. Вычислить сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 8}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 10}+\ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}(x+1)^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\ln(1-x-20x^2).$$

5. Вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

6. Взяв три члена разложения в степенной ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$y' - y = xy^2,\ y(0) = 1.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x^2$$

в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Вариант 19

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а)}\ \frac{(1!)^2}{1!} + \frac{(2!)^2}{3!} + \frac{(3!)^2}{5!} + \ldots;$$

$$\text{б)}\ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 8} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{10\cdot 14} + \ldots .$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x) = (2 - e^x)^2.$$

5. Вычислить $\cos 48^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

6. Взяв три члена разложения в степенной ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + y = xy^2,\ y(0) = 1.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x,\ -2 < x < 2.$$

9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = 2x - 1$$

в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Вариант 20

1. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды

$$\text{а) } \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \ldots;$$

$$\text{б) } 2 - \frac{5}{8} + \frac{10}{27} - \frac{17}{64} + \ldots .$$

2. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots.$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n^4+1\right)^2}(x-3)^n.$$

4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}.$$

5. Вычислить $\sqrt[3]{e}$ с точностью до $0,0001$.

6. Взяв три члена разложения в степенной ряд подынтегральной функции, вычислить

$$\int_0^{0,5} x \operatorname{arctg} x\, dx.$$

Оценить погрешность полученного результата.

7. Решить дифференциальное уравнение

$$xy'+y=xy^2,\ y(1)=1.$$

Определить три ненулевых члена разложения в ряд решения.

8. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, & -6<x\le -2, \\ -1, & -2<x\le 2. \end{cases}$$

9. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x+1$$

в промежутке $(-\pi,\ \pi)$.

Библиографический список

1. Высшая математика : учебник / М. Л. Краснов, А. И. Кисилев, Г. И. Макаренко [и др.]. — М. : Едиториал УРСС, 2005. — Т. 3.
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М. : Высшая школа, 1999. — Ч. 2.
3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. — М. : Рольф, 2000.
4. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. / под ред. А. В. Ефимова, А. Ф. Каракулина, В. В. Лесина [и др.]. — М. : Издательство физико-математической литературы, 2007. — Ч. 3.
5. Шипачев В. С. Основы высшей математики / В. С. Шипачев. — М. : Высшая школа, 1994.
6. Виленкин И. В. Высшая математика: интегралы по мере; дифференциальные уравнения; ряды / И. В. Виленкин, В. М. Гробер, О. В. Гробер. — Ростов н/Д : Феникс, 2011.

Учебное издание

Гредасова Надежда Викторовна
Желонкина Наталья Игоревна
Корешникова Мария Анатольевна
Полищук Ефим Григорьевич
Андреева Ирина Юрьевна

РЯДЫ

Редактор О. С. Смирнова
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 18.08.2016. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать цифровая. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 4,2. Усл. печ. л. 6,7. Тираж 100 экз.
Заказ 305

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2015

9785799618148